ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE I

1. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$ si et seulement s'il existe une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (u, v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u, v) = h_1(u)$.

2. Soit $\Phi : (u, v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

   (b) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, exprimer $\Phi^{-1}(x, y)$ et justifier que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   On pose $f^* = f \circ \Phi$.

   (a) Justifier que la fonction f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f^*}{\partial v}$ de f^*.

   (b) En déduire la forme de la fonction f^* puis donner celle de f.

4. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ax + by,$$

   où a et b sont des réels.

   (a) Trouver une fonction g, linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = ax + by.$$

   (b) En déduire qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = F(xy) + ax - by.$$

EXERCICE II

Soient α et β deux réels positifs de somme non nulle ; on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée de $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et la relation $\quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n},\ n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Quelles sont les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que si $u_n < 1$ à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire

   $$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n < 1,$$

   alors la suite croit à partir de ce rang n_0. (on pourra comparer x et x^2 pour $x \in [0, 1]$).
4. En déduire que 0 n'est pas limite de cette suite.
5. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant 1$ et montrer que

   $$\forall\, n \geqslant N,\ u_n \geqslant 1.$$

6. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.
   (a) Montrer qu'il suffit de montrer que la suite $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
   On pose alors $z_n = |\sqrt{u_n} - 2|,\ n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $z_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$.
   (c) On pose $a = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ et on considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = z_{n+1} - a z_n.$$

   i. Montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant (\frac{1}{3} - a)x_n$.
   ii. Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (d) Justifier que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend, elle aussi, vers 0 et conclure.

EXERCICE III

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives sur l'espace Ω muni de la probabilité P, deux à deux indépendantes et de même loi.

On définit une nouvelle suite $(S_k)_{k\geqslant 0}$ de variables aléatoires par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

1. Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et donner un exemple concret de situation conduisant à une telle loi.
2. Si la loi commune des variables aléatoires X_k est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n,\ n \geqslant 1$.

   On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de densités f et g, alors la loi de leur somme $X + Y$ est donnée par la densité $f * g$ définie par

   $$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x - y)\, dy,\ x \in \mathbb{R}.$$

3. Dans cette question et la suivante, on suppose que les variables aléatoires X_k sont discrètes et prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ selon la loi uniforme.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

4. (a) Étant donné des complexes $a_0, \ldots, a_p$, $p \in \mathbb{N}$, montrer que, pour tout z complexe,

$$\sum_{j=0}^{p}(a_j - a_{j-1})z^j = a_p z^p + (1-z)\sum_{j=0}^{p-1} a_j z^j$$

   avec la convention $a_{-1} = 0$.

   (b) En dérivant le développement en série entière de la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$, déterminer celui de la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, en précisant le rayon de convergence.

   (c) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n.

5. Montrer que

$$\forall\, t \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P(S_n \leqslant t) \leqslant e^t q^n,$$

   où q désigne l'espérance de chaque variable aléatoire e^{-X_k}.

6. (a) Calculer la valeur de q lorsque la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (b) On suppose que les variables aléatoires X_k ont discrètes et prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ et de loi donnée par

$$P(X_k = n) = p_n.$$

   À quelle condition le nombre q correspondant est-il < 1 ?

   Dans la suite, on suppose que $q < 1$.

7. (a) Expliquer l'égalité entre l'ensemble des $w \in \Omega$ tels que la suite $(S_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'ensemble

$$\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{w \in \Omega/\ S_n(w) \leqslant t\}.$$

   (b) Montrer que, pour tout nombre positif t,

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{w \in \Omega/\ S_n(w) \leqslant t\}\Big) = 0.$$

   (c) Quelle conclusion pouvez-vous tirer de ce qui précède ?

FIN DE L'ÉPREUVE